

In Abb. 7 ist für den Außendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> die Reaktionswärmeleitfähigkeit für verschiedene Magnetfelder über der Temperatur aufgetragen. Man sieht hier einen starken Einfluß von  $B$ . Bei einer Induktion von 50 kT ist das Maximum von  $\kappa_R$  um fast eine Zehnerpotenz niedriger als bei  $B = 0$ .

Abschließend soll noch bemerkt werden, daß alle hier durchgeführten Überlegungen und Rechnungen

nur gültig sind für den Fall lokalen thermischen Gleichgewichtes. Insbesondere ist vorausgesetzt, daß die SAHA-Gleichung für die Berechnung des Ionisationsgrades gültig ist. Es ist daher bei praktischer Benutzung der hier mitgeteilten Rechnungen stets eine Prüfung notwendig, ob die gemachten Voraussetzungen wirklich erfüllt sind. Falls die Abweichungen vom „SAHA-Gleichgewicht“ nicht sehr groß sind, dürften die ermittelten Werte für die Reaktionswärmeleitfähigkeit eine gute Näherung bedeuten.

## Zum Zündmechanismus einer Theta-Pinch-Entladung

Von R. CHODURA

Institut für Plasmaphysik, Garching b. München \*

(Z. Naturforschg. 19 a, 679—690 [1964]; eingegangen am 13. Februar 1964)

In der folgenden Arbeit werden die Vorgänge bei der Ionisation durch Elektronenstoß im zeitlich veränderlichen Magnetfeld  $B_z(t)$  einer Thetapinch-Spule diskutiert. Diese Vorgänge sind stark abhängig von der im Gas bereits vorhandenen Ladungsträgerdichte. Bei geringer Ladungsträgerdichte ist das elektrische Feld nicht rotationssymmetrisch, und die Ionisation ist hauptsächlich auf die Umgebung des Spulenschlitzes (Stromzuführung) beschränkt.

Von einer gewissen Ladungsträgerdichte an werden äußere elektrische Potentialfelder abgeschirmt, gleichzeitig werden aber infolge ungleicher Bewegung von Elektronen und Ionen innere Raumladungsfelder erzeugt. Es wird versucht, eine annähernde, selbstkonsistente Beschreibung dieser Bewegung zu geben. Bei starker Kopplung von Ionen- und Elektronenbewegung (Quasineutralität) bewegen sich Elektronen und Ionen in radialer Richtung so, als hätten sie beide die gleiche Masse von der Größe des geometrischen Mittels aus Ionen- und Elektronenmasse,  $m = (m_i m_e)^{1/2}$ .

Die Elektronenenergie  $W$  wird charakterisiert durch die Größe  $\mu = W/B_z$ . Bei linearer Veränderung von  $B_z$  mit der Zeit,  $B_z \sim t$ , ist  $\mu$  für  $|t| \gg (m_i m_e)^{1/4} / e \dot{B}_z^{1/2}$  eine periodische Funktion in  $t^2$ . Ihr Maximalwert  $\mu_{\max}$  für ein Elektron, das zur Zeit  $t_0$  losläuft, ist gleich dem  $(m_i/m_e)^{1/4}$ -fachen des Wertes von  $\mu$  eines freien Elektrons, das zur Zeit  $(m_e/m_i)^{1/4} t_0$  seine Bewegung am gleichen Ort  $r_0$  begonnen hat. Für  $|t_0| \gg (m_i m_e)^{1/4} / e \dot{B}_z^{1/2}$  ist insbesondere

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_0) / |B_z(t_0)|, \quad v_D = E_\phi / B_z(t_0) = \frac{1}{2} r_0 \dot{B}_z / B_z(t_0),$$

d. h. ein Elektron gewinnt in seiner ersten Bewegungsperiode eine Maximalenergie  $W_{\max}$  von der Größe der Ionendriftenergie.

Auf Grund dieser Ergebnisse werden Schranken dafür angegeben, wie lange bei einem beliebigen Verlauf von  $B_z(t)$  Ionisation möglich ist. Diese Schranken geben den experimentell gefundenen Streubereich der Zündzeitpunkte beim Thetapinch gut wieder. Es wird auch der Fall diskutiert, daß an Stelle des Wirbelfeldes  $E_\phi = \frac{1}{2} r \dot{B}_z$  ein statisches elektrisches Feld angelegt wird und  $B = \text{const}$  ist. Die in diesem Fall, z. B. bei rotierenden Plasmen und ähnlichen Anordnungen beobachtete kritische Geschwindigkeit  $v_c = (2 W_i / m_i)^{1/2}$  ( $W_i$  = Ionisationsenergie des verwendeten Gases) könnte sich vielleicht durch die oben beschriebene Grenzenergie  $W_{\max}$  eines Elektrons in einem solchen Feld erklären lassen.

Beim Betrieb einer  $\Theta$ -Pinch-Entladung mit einem Spulenstrom, der im Verlauf der Entladung mehrmals sein Vorzeichen ändert, nehmen die zeitlichen und örtlichen Bereiche um die Nullstelle des Magnetfeldes eine gewisse Sonderstellung ein. Einerseits hört hier die einschließende Wirkung des Magnetfeldes

wegen der großen Gyrationenradien der Teilchen auf, andererseits gilt nicht mehr die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments.

Es soll hier das Verhalten geladener Teilchen für einen einfachen Fall des Nulldurchgangs des Magnetfeldes beschrieben werden, nämlich für den Nulldurchgang vor der eigentlichen Zündung des Gases in der  $\Theta$ -Pinch-Spule. Es soll weiter versucht werden, den Zündvorgang selbst etwas besser zu verstehen, um den Einfluß äußerer Änderungen, z. B.

\* Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.



des äußeren Stromkreises, des Füllgasdruckes, eines überlagerten stationären Magnetfeldes, oder der Vorionisierung, auf den Anfangszustand des Plasmas vor der Kontraktionsphase abschätzen zu können.

Unter dem Begriff „Zündung“ wird in dieser Arbeit derjenige Zeitpunkt verstanden, zu dem sich im Inneren des Füllgases erstmals eine merkliche Veränderung der Magnetfeld-Verteilung gegenüber der Vakuum-Feldverteilung zeigt, mit anderen Worten, wenn im Füllgas ein Strom von vergleichbarer Größenordnung zum äußeren Spulenstrom fließt. Die folgenden Überlegungen beziehen sich daher nur auf Nulldurchgänge des Magnetfeldes, welche über den ganzen Spulenquerschnitt gleichzeitig erfolgen.

Die oben definierte „Zündung“ äußert sich infolge der mit ihr verbundenen Verringerung der Induktivität des Entladungsstromkreises in einer sprunghaften Vergrößerung des Betrages der Zeitableitung des Spulenstroms bzw. in einer Verkleinerung des Betrages der um das Entladungsgefäß gemessenen Umfangsspannung. Die Erscheinung, daß diese Zündsprünge immer in einem Zeitbereich von einigen  $10^{-7}$  sec Breite (bei einigen  $\mu$ sec Periodendauer) um den Nulldurchgang des Spulenmagnetfeldes erfolgen, wurde schon zu Beginn der Untersuchungen am Theta-Pinch bemerkt, und sowohl die Änderung ihrer Lage in der Folge der Nulldurchgänge, als auch innerhalb des schmalen Zeitbereichs um den Nulldurchgang durch Veränderung des Füllgasdruckes<sup>1</sup>, überlagerten Magnetfeldes<sup>2,3</sup> und der Vorionisierung untersucht.

Das schlechte Ionisationsvermögen der  $\Theta$ -Pinch-Apparatur – ohne Zündhilfe dauert der Ionisierungsvorgang bis zur Zündung einige Halbwellen der Entladung – erklärt sich aus der Behinderung der Ionisation durch das Spulenmagnetfeld. Trotz der ziemlich hohen induzierten elektrischen Feldstärken von ca. 1 kV/cm können die Elektronen außer in der Nähe des Nulldurchgangs des Magnetfeldes nicht nennenswert beschleunigt werden, weil sie sofort vom Magnetfeld auf eine Gyrationbahn gezwungen werden, auf der ihre Energie nur mehr entsprechend ihrem anfangs gewonnenen kleinen magnetischen Moment zunimmt<sup>4</sup>. Dies führt dazu, daß Elektronen,

die außerhalb eines kritischen Zeitbereiches von etwa  $10^{-8}$  sec um den Nulldurchgang des Magnetfeldes durch Stoßionisation entstehen, ihrerseits nicht mehr an der weiteren Vermehrung teilnehmen können, weil sie im Verlauf der Halbwelle des Magnetfeldes die Ionisierungsenergie nicht mehr erreichen. Da die Stoßfrequenz für ionisierende Stöße bei 0,1 Torr aber günstigenfalls etwa  $2 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}$  ist, so folgt, daß die exponentielle Elektronenvermehrung im kritischen Zeitbereich um den Nulldurchgang des Magnetfeldes nach wenigen Generationen abbricht und bestenfalls nur einen Vermehrungsfaktor pro Nulldurchgang der Größenordnung 10 liefert. Dem widerspricht aber, daß eine  $\Theta$ -Pinch-Entladung bei 0,1 Torr Füllgasdruck bereits beim zweiten Nulldurchgang des Magnetfeldes zündet.

Erklärungsversuche für diesen Widerspruch nahmen entweder eine zusätzliche Ionisierung durch Sekundärelektronen-Vervielfachung an der Gefäßwand<sup>1,3,5</sup> oder eine Veränderung des Elektronen-Energiegewinns infolge Raumladung im Gasvolumen an<sup>6</sup>. Während die erste Erklärung etwas unrealistische Annahmen über die elastische Reflexion von Elektronen an der Gefäßwand machen mußte, blieb bei der zweiten unter anderem die Frage offen, auf welche Weise eine Elektronen- und Ionendichte erreicht wird, welche Raumladungsfelder von einer mit der induzierten elektrischen Feldstärke vergleichbaren Größe erzeugen könnte.

Im folgenden werden daher die Möglichkeiten der Elektronenvermehrung durch Stoßionisation etwas genauer diskutiert, wobei die im Verlauf der Vermehrung erfolgende Veränderung des im Gefäßvolumen herrschenden elektrischen Feldes mitberücksichtigt werden muß.

## 1. Ionisation im nicht-rotationssymmetrischen elektrischen Feld

Betrachten wir zunächst das elektrische Feld, das sich allein auf Grund des zeitlich veränderlichen Spulenstromes ohne Störungen durch Raumladungen im Inneren einer geraden, kreisförmigen Zylinderspule unendlicher Länge mit einer Stromzuführung

<sup>1</sup> J. A. REYNOLDS u. N. J. PHILLIPS, Proc. 5th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, München 1961, S. 2288.

<sup>2</sup> H. BEERWALD, Proc. 5th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, München 1961, S. 1507.

<sup>3</sup> E. BERTOLINI, B. BRUNELLI, R. GRATTON u. S. E. SEGRE, 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963.

<sup>4</sup> R. CHODURA u. M. KEILHACKER, Z. Naturforsch. **17 a**, 977 [1962].

<sup>5</sup> T. H. JENSEN u. H. G. VOORHIES, General Atomic Rep. GA-2867 [1962].

<sup>6</sup> H. A. B. BODIN, T. S. GREEN, G. B. F. NIBLETT u. N. J. PEACOCK, Proc. 4th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala 1959, S. 1065.

ausbildet. Es wurde in <sup>7</sup> und <sup>7a</sup> beschrieben und lautet (Abb. 1):

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \frac{1}{2} [r \mathfrak{B}] - \text{grad } \Phi, \\ \Phi &= -R_s^2 \dot{B}_z \arctg \frac{(r/R_s) \sin \varphi}{1 + (r/R_s) \cos \varphi}.\end{aligned}\quad (1)$$

Gl. (1) befriedigt die MAXWELL-Gleichung

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}}$$

und die Randbedingung, daß das elektrische Feld senkrecht auf der einen guten Leiter darstellenden Spule stehen muß.

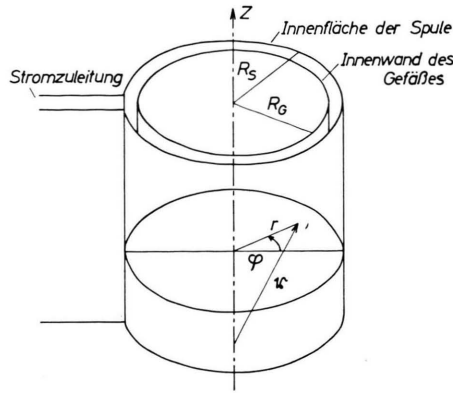


Abb. 1. Anordnung der Thetapinch-Spule und Koordinatensystem.

Der prinzipielle Verlauf der zeitlichen Energieänderung eines geladenen, freien (d. h. nicht stoßenden) Teilchens in einem durch (1) gegebenen elektrischen und dazu senkrecht stehenden, homogenen, zeitlich veränderlichen Magnetfeld wurde in <sup>4</sup> dargestellt. Danach durchläuft ein zur Zeit  $t_0$  ruhendes Teilchen zunächst eine Phase nicht-adiabatischer Beschleunigung der Dauer

$$t_1 - t_0 \approx \frac{1}{|\omega_g(t_1)|},$$

wobei  $\omega_g(t) = e B_z(t)/m$  die Gyrationfrequenz des Teilchens (Ladung  $e$ , Masse  $m$ ) bedeutet. Für  $t_0 = 0$  (wobei der Nullpunkt des Zeitmaßstabes mit dem Nulldurchgang des Magnetfeldes zusammenfallen soll), ist

$$t_1 \approx \frac{1}{\sqrt{|\dot{\omega}_g(0)|}}, \quad (2a)$$

für

$$t_0 \gg \frac{1}{\sqrt{|\dot{\omega}_g(0)|}}$$

und monoton wachsendes  $\omega_g(t)$  [z. B.  $\omega_g(t) = \frac{\dot{\omega}_g(0)}{\omega} \sin \omega t$  und  $\omega t_0 < \pi/2$ ] geht auch  $t_1$  monoton gegen  $t_0$ :

$$t_1 \approx t_0 + 1/|\omega_g(t_0)|. \quad (2b)$$

Nach der Zeit  $t_1$  besitzt das Teilchen eine Energie

$$W(t_1) \approx \frac{e^2}{2m} E^2(t_0) (t_1 - t_0)^2 = \frac{e^2}{2m} E^2(t_0) \frac{1}{\omega_g^2(t_1)} \quad (3)$$

und ein annähernd adiabatisch invariantes magnetisches Moment

$$\mu(r_0, t_0) \approx \frac{e^3}{2m^2} E^2(r_0, t_0) \frac{1}{|\omega_g^3(t_1)|}. \quad (4)$$

Damit wird die Energie  $W$  zu einer Zeit  $t > t_1$

$$W(t; r_0, t_0) = \mu(r_0, t_0) B_z(t). \quad (5)$$

Die Voraussetzung stoßfreier Bewegung in der nicht-adiabatischen Beschleunigungsphase des Teilchens ist gewährleistet, wenn

$$t_1 - t_0 < 1/\nu$$

oder

$$\sqrt{|\dot{\omega}_g(0)|} > \nu,$$

wobei  $\nu$  die totale Stoßfrequenz des Teilchens bedeutet. Dies ist für Elektronen bei den üblichen Parametern der Thetapinch-Entladungen sicher erfüllt.

Im Verlauf der adiabatischen Bewegungsphase wird das Teilchen natürlich Stöße ausführen.

Bei elastischen Stößen verändert das Teilchen sein magnetisches Moment im Mittel um  $m E^2/B^3$  pro Stoß, jedoch wollen wir diese Änderung vernachlässigen, weil sie für Teilchen, die in der Nähe des Nulldurchgangs von  $B$  loslaufen, klein gegen das zur Zeit des Stoßes bereits erreichte magnetische Moment sind, und bei späterem Loslaufen kein für die Ionisierung bedeutender Energiegewinn erzielt wird.

Weiter werden im Rahmen dieser nur qualitativen Abschätzung auch keine anregenden Stöße, Mehrfachprozesse usw. betrachtet.

Beim ionisierenden Stoß eines Elektrons gegen ein Neutralgas-Molekül oder Atom ist die Tatsache wichtig, daß das eine der nach der Ionisierung vorhandenen 2 Elektronen ziemlich unabhängig von der Energie des stoßenden Elektrons nur eine geringe Energie von der Größenordnung 1 eV besitzt, und es erhebt sich die Frage, ob und unter welchen Umständen dieses langsame Elektron die zur Fortsetzung der

<sup>7</sup> J. E. ALLEN u. S. E. SEGRE, NUOVO Cim. **21**, 980 [1961].

<sup>7a</sup> G. MALESANI, E. MAZZUCATO, G. ROSTAGNI u. B. SCIMENI, Proc. 5th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, München 1961, S. 2138.

exponentiell ansteigenden Elektronenlawine nötige Ionisierungsenergie gewinnen kann. Dabei soll wiederum zur Vereinfachung angenommen werden, daß das langsame Elektron unmittelbar nach dem ionisierenden Stoß überhaupt ruht. Der Zeitpunkt  $t_{0 \max}$ , zu dem ein langsames Elektron irgendwo im Volumen entstanden sein muß, um im Verlauf der weiteren Viertelwelle von  $B_z$  gerade nicht mehr die Ionisierungsenergie  $W_i$  erreichen zu können, stellt sicher eine obere Grenze für die Zeit der exponentiellen Elektronenvermehrung dar.

Nach den Gln. (5), (4) und (1) ist der Energiegewinn für Teilchen am größten, die in der Nähe der Stromzuführung der Spule entstehen. Zur Bestimmung von  $t_{0 \max}$  könnte man also  $r_0 = R_G$ ,  $\varphi_0 = \pi$  setzen und erhält dann aus (5), (4), (2b) und (1)

$$\frac{1}{8} e R_s^2 \left( \frac{R_G}{R_s} + \frac{2}{1 - (R_G/R_s)} \right)^2 \frac{\dot{\omega}_g^2(t_{0 \max})}{|\omega_g^3(t_{0 \max})|} \cdot B_{\max} = W_i \quad (6a)$$

$B_{\max}$  ist das maximale Magnetfeld der Halbwelle. Für  $R_s = 2,5$  cm,  $R_G = 2,2$  cm,  $\dot{B}(0) = 5,6 \cdot 10^{10}$  T/sec,  $B_{\max} = 5 \cdot 10^4$  T und molekularen Wasserstoff ergibt sich  $t_{0 \max} = 2,0 \cdot 10^{-7}$  sec.

Analog könnte man eine Schranke für den Beginn der exponentiellen Ionisierung vor dem nächsten Nulldurchgang von  $B_z$  dadurch angeben, daß man  $W(t_1, r_0)$  nach Gl. (3) und für  $r_0$  an der Zuführung gleich  $W_i$  setzt [hier stellt  $W(t_1)$  ein Maximum für  $W(t)$  dar, da  $W(t)$  in der adiabatischen Bewegungsphase wegen  $|B_z| \rightarrow 0$  abnimmt]. Zusammen mit (1) und (2b) ergibt sich dann:

$$\frac{1}{8} m_e R_s^2 \frac{\dot{\omega}_g^2(t_{0 \min})}{\omega_g^2(t_{0 \min})} \left( \frac{R_G}{R_s} + \frac{2}{1 - (R_G/R_s)} \right)^2 = W_i \quad (6b)$$

und bei den oben verwendeten Parametern und  $W_i = 15,4$  eV ist  $t_{0 \min} = 0,92 \cdot 10^{-7}$  sec.

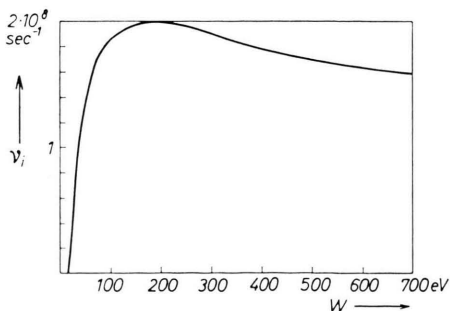


Abb. 2. Stoßfrequenz für ionisierende Stöße  $\nu_i$  eines Elektrons gegen  $H_2$ -Moleküle in Abhängigkeit von der Energie  $W$  des Elektrons.

Diese Ionisierungszeiten würden einen ziemlich großen Vermehrungsfaktor eines primär vorhandenen Elektrons pro Nulldurchgang ergeben <sup>7b</sup>. Abb. 2 gibt die Stoßzahl ionisierender Stöße von Elektronen gegen  $H_2$ -Moleküle bei 0,1 Torr Druck. Mit  $t_{0 \max} = 2 \cdot 10^{-7}$  sec und  $\nu_i = 2 \cdot 10^8$  ergäbe sich z. B. ein maximaler Vermehrungsfaktor

$$V = e^{\nu_i t_{0 \max}} \approx 10^{12}.$$

Es erhebt sich aber natürlich die Frage, wieviel der vor der Nullstelle von  $B$  vorhandenen Teilchen wirklich eine exponentielle Vermehrung erfahren. So zeigt eine Betrachtung der Driftbewegung der Ladungen im  $\mathcal{E}$ -Feld nach Gl. (1) und dazu senkrechten  $B$ -Feld, daß die Ladungen nach dem Nulldurchgang von  $B$  aus dem Gebiet hoher elektrischer Feldstärke bei der Spulenzuführung in das Gebiet niedriger Feldstärke am gegenüberliegenden Gefäßrand driften würden.

Genauere Rechnungen, die von K. HAIN für eine homogene Anfangsdichteverteilung über den Gefäßquerschnitt zur Zeit  $t_0$  angestellt wurden, zeigen, daß für  $t_0$  in der Nähe des Nulldurchgangs

$$(|\tau_0| = V |\dot{\omega}_g| |t_0| < 1)$$

fast alle Teilchen innerhalb eines Zeitintervalls  $\Delta t \approx 1$  auf die Gefäßwand treffen (Abb. 3). Es ist also sicher eine starke Wechselwirkung der Elektronen mit der Gefäßwand während dieser Ionisierungsphase vorhanden, die vielleicht verhindert, daß Elektronen zu rasch aus den Gebieten hinausdriften, in denen sie sich exponentiell vermehren können. Wegen der Unübersichtlichkeit der Wandprozesse kann man diese Ionisierungsphase im reinen Vakuum- $\mathcal{E}$ -Feld (1) kaum genauer untersuchen und sie ist auch prak-

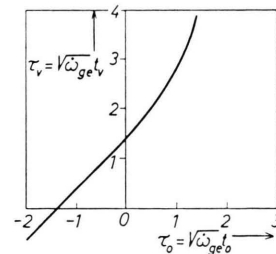


Abb. 3. Zeitpunkt  $t_v$  des Verlustes der Hälfte der ursprünglich vorhandenen Elektronen an die Wand. Die Elektronen hatten zu Beginn der Bewegung  $t_0$  homogene Dichteverteilung.

<sup>7b</sup> G. MALESANI, Proc. 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963, Bd. II, S. 581.

tisch kaum wichtig, weil sie durch äußere Vorionisierung meist übersprungen wird.

Bei zunehmender Ladungsträgerdichte im Gasvolumen gelangen durch Stöße oder beim Nulldurchgang des Magnetfeldes immer mehr geladene Teilchen – annähernd den Feldlinien folgend – an die Wand, und zwar so lange, wie eine Radialkomponente des elektrischen Feldes am Gefäßrand erhalten bleibt. Mit ihrem Verschwinden verschwindet der

gesamte Potentialfeldanteil in Gl. (1) und es bleibt allein das rotationssymmetrische Wirbelfeld übrig.

Die zur Aufhebung des Potentialfeldes im Gefäßinnenraum an der Gefäßwand nötige Ladungsdichte  $\sigma$  ergibt sich unter Verwendung der Randbedingungen

$$E_\varphi(R_s) = 0, \quad E_r(R_G) = 0$$

zu

$$\sigma(R_G, \varphi) = - \frac{\dot{B}_z}{2\pi c^2} \frac{R_s^2}{R_G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - (R_G/R_s)^{2n}} \left(\frac{R_G}{R_s}\right)^n \sin n\varphi. \quad (7)$$

Die mittlere Anzahl von Ladungsträgern, die pro Volumeinheit mindestens vorhanden sein muß, um ein  $\sigma(\varphi)$  nach Gl. (7) erzeugen zu können, ist dann

$$\begin{aligned} n_{\min} &= \frac{R_G \int_0^\pi \sigma(R_G, \varphi) d\varphi}{e R_G^2 \pi} = \frac{\dot{B}_z}{2\pi^2 c^2 e} \left(\frac{R_s}{R_G}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(-1)^n}{1 - (R_G/R_s)^{2n}} \left(\frac{R_G}{R_s}\right)^n (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{B_z}{2\pi^2 c^2 e} \left(\frac{R_s}{R_G}\right)^2 \left\{ \ln \frac{1+R_G/R_s}{1-R_G/R_s} + \ln \frac{1+(R_G/R_s)^3}{1-(R_G/R_s)^3} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Für  $R_G/R_s = 0,9$  und  $\dot{B}_z = 5,6 \cdot 10^{10}$  T/sec ist diese Zahl

$$n_{\min} = 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

Sie hängt natürlich ziemlich stark vom Verhältnis  $R_G/R_s$  ab.

## 2. Ionisierung im rotationssymmetrischen elektrischen Feld

Nach Abschirmung des nicht-rotationssymmetrischen Potentialfeldes, das von Ladungen auf der Spulenoberfläche herrührte, bleibt zunächst nur das rotationssymmetrische Wirbelfeld

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \dot{\mathfrak{B}}] \quad (9)$$

im Inneren des Glasgefäßes übrig.

Betrachtet man die Bewegung von Ladungen in diesem und dem dazu senkrechten homogenen Magnetfeld  $B_z(t)$ , so erkennt man bereits aus der Bewegungsgleichung der Ladung  $e$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \left( \frac{1}{2} [\mathbf{r} \dot{\mathfrak{B}}] + [\dot{\mathbf{r}} \mathfrak{B}] \right), \quad (10)$$

daß für zeitlich konstantes  $\mathfrak{B}$  und für Anfangsbedin-

gungen

$$\mathbf{r}(\tau_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(\tau_0) = 0$$

die Bahn des Teilchens

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau, \tau_0, \mathbf{r}_0)$$

nur mehr von einem dimensionslosen Parameter

$$\tau = \sqrt{\dot{\omega}_g} t, \quad \omega_g = e B_z / m \quad (11)$$

und nicht mehr explizit von Ladung und Masse abhängt (Veränderung des Vorzeichens von  $e$  von + nach – bedeutet eine Änderung des Koordinatensystems vom Rechts- zu einem Linkssystem). Insbesondere durchlaufen also ein Elektron und ein Ion mit gleicher Anfangsbedingung eine spiegelsymmetrische, aber ansonsten gleiche Bahn, allerdings mit einem verschiedenen Zeitmaßstab, der durch (11) gegeben ist.

Die Lösung der Bewegungsgleichung (10) für  $\mathfrak{B} = \text{const}$  wurde in <sup>4</sup> angegeben. Sie lautet für ein zur Zeit  $t = t_0$  am Ort  $\mathbf{r}_0$ ,  $\varphi_0$  ruhendes Teilchen

$$\begin{aligned} r e^{i\varphi} &= r_0 e^{i(\varphi_0 + 1/4 \tau_0^2 - 1/4 \tau^2)} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \tau_0^{3/2} \tau^{1/2} \\ &\cdot \{ [J_{3/4}(\tfrac{1}{4}\tau_0^2) + i J_{-1/4}(\tfrac{1}{4}\tau_0^2)] J_{1/4}(\tfrac{1}{4}\tau^2) + [J_{-3/4}(\tfrac{1}{4}\tau_0^2) - i J_{1/4}(\tfrac{1}{4}\tau_0^2)] J_{-1/4}(\tfrac{1}{4}\tau^2) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

$r, \varphi$  gibt den Ort des Teilchens zur Zeit  $\tau = \sqrt{\dot{\omega}_g} t$  an,  $J$  bedeutet BESSEL-Funktionen.

Abb. 4 zeigt den Abstand  $r(t, t_0)$  zweier Teilchen mit gleichem Ladungsbetrag, aber verschiedener Masse  $m_i$  bzw.  $m_e$  für 3 verschiedene Anfangszeiten  $t_0$ . Die Teilchen schwingen um ein Gyrationzentrum, das durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist und führen außerdem eine radiale Drift aus. Man sieht, daß für Anfangszeiten

$$|t_0| \ll 1/|\dot{\omega}_{gi}|, \quad \omega_{gi} = e B_z / m_i,$$

um den Nulldurchgang des Magnetfeldes das schwerere Teilchen hinter dem leichteren zurückbleibt, während für

$$t_0 \gg 1/|\dot{\omega}_{gi}|$$

die Amplitude der Gyrationbewegung für beide Teilchenarten sehr klein geworden ist und die massen-unabhängige Drift die Bewegung bestimmt.

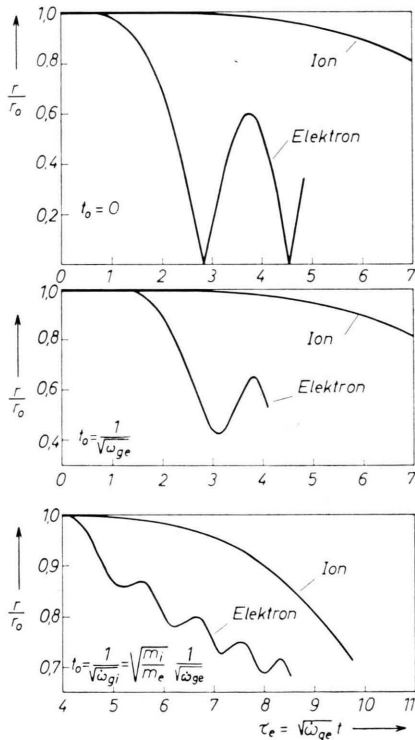


Abb. 4. Abstand  $r$  eines Elektrons bzw. Ions von der Achse für 3 verschiedene Zeiten  $t_0$  des Bewegungsbeginns (das Massenverhältnis Ion : Elektron wurde wie 16 : 1 angenommen).

Man erkennt daraus, daß in der Umgebung des Nulldurchgangs des Magnetfeldes Ladungstrennungen zwischen leichten Elektronen und schweren Ionen auftreten müssen, die bei genügender Ladungsträgerdichte zum Auftreten radialer Raumladungsfelder im Gas führen.

Will man nun den Energiegewinn eines neu gebildeten Elektrons in einer derartigen Feldkombination aus elektrischem Raumladungs- und Wirbelfeld zusammen mit dem zeitabhängigen Magnetfeld ermitteln, so stellt sich das Problem, die Bewegungsgleichung (10) vermehrt um ein Glied mit der Raumladungsfeldstärke  $\mathfrak{E}_r$  selbstkonsistent zu lösen. Das heißt es müssen Lösungen der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} (\mathfrak{E}_r + \frac{1}{2} [\mathbf{r} \mathfrak{B}] + [\dot{\mathbf{r}} \mathfrak{B}]) \quad (13)$$

gefunden werden, derart, daß die Teilchendichte der Ionen und Elektronen  $n_i$  und  $n_e$ , die sich aus dieser Bewegung ergibt, die Poisson-Gleichung

$$\text{div } \mathfrak{E}_r = 4 \pi c^2 e (n_i - n_e) \quad (14)$$

befriedigt.

Es wurde nicht versucht, dieses Problem streng zu lösen. Vielmehr wurde folgendes vereinfachte Modell zugrunde gelegt.

Nimmt man einmal an, daß Ionen bzw. Elektronen je einen Zylinder mit einem Radius  $R_i(t)$  bzw.  $R_e(t)$  mit gleichmäßiger Dichte  $n_i$  bzw.  $n_e$  erfüllen und sei z. B.  $R_e < R_i$  (Abb. 5), dann wird Gl. (14) befriedigt durch

$$\begin{aligned} E_r &= 2 \pi c^2 e (n_i - n_e) r & \text{für } 0 \leq r \leq R_e, \\ E_r &= 2 \pi c^2 e (n_i - n_e R_e^2 / r^2) r & \text{für } R_e \leq r \leq R_i, \\ E_r &= 0 & \text{für } R_i \leq r. \end{aligned} \quad (15)$$

Innerhalb des kleineren der beiden Zylinder wächst also  $E_r = F(t) \cdot r$  linear mit  $r$ . Dann folgt aber aus der Bewegungsgleichung (13), daß die Bahn eines Elektrons, das zum Zeitpunkt  $t_0$  am Orte  $r_0$  ruhte, durch eine Gleichung

$$r = r_0 f(t, t_0)$$

gegeben ist, d. h. bezüglich des Abstands  $r$  von der Zylinderachse verlaufen alle Elektronenbahnen im Zylinder ähnlich. Insbesondere bleibt ein Elektron,

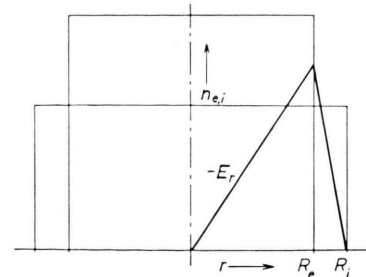


Abb. 5. Elektronen- bzw. Ionenzyylinder mit zugehöriger Raumladungsfeldstärke  $E_r$  bei homogener Dichteverteilung.

das sich anfangs am Zylinderrand befand, immer am Zylinderrand, solange nur  $R_i > R_e$ , und eine anfangs homogene Dichteverteilung bleibt im Verlauf der Bewegung homogen.

Die hier gemachte Näherung besteht nun darin, auch für die gesamte Ausdehnung des größeren Zylinders eine linear mit  $r$  veränderliche Feldstärke  $E_r$  anzunehmen und dadurch auch für die zweite Teilchenart, in unserem Beispiel die Ionen, ähnliche Teilchenbahnen und homogene Dichteverteilung zu erhalten. Diese Näherung ist zwar für das Gebiet falsch, das nur von einem der beiden Zylinder umschlossen ist, doch werden dieses Gebiet und die darin enthaltene Anzahl von Teilchen mit zunehmender Teilchenzahl und Annäherung an die Quasineutralität relativ immer kleiner.

Wir nehmen also eine Raumladungsfeldstärke der Form an:

$$E_r = 2\pi c^2 e n_0 R_0^2 \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) r, \quad (15 a)$$

wobei  $n_0$  die gemeinsame Anfangsdichte von Ionen und Elektronen und  $R_0$  der gemeinsame Anfangsradius des Ionen- bzw. Elektronenzylinders ist.

Die Bewegungsgleichung (13) lautet dann in  $r$ - und  $\varphi$ -Komponenten:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 &= r_i \dot{\varphi}_i \omega_{gi} + \frac{1}{2} \omega_{pi}^2 R_0^2 \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) r_i, \\ r_i \ddot{\varphi}_i + 2 \dot{r}_i \dot{\varphi}_i &= -\frac{1}{2} r_i \dot{\omega}_{gi} - \dot{r}_i \omega_{gi} \end{aligned} \quad (13 a)$$

für die Ionen bzw. wenn man  $\omega_{gi}$  durch  $-\omega_{ge}$  und  $\omega_{pi}^2$  durch  $-\omega_{pe}^2$  ersetzt analog für die Elektronen. Dabei ist

$$\omega_{gi,e} = |e| B_z / m_{i,e}, \quad \omega_{pi,e}^2 = 4\pi e^2 c^2 n_0 / m_{i,e}.$$

Die  $\varphi$ -Komponenten der Bewegungsgleichungen lassen sich integrieren. Sie geben die Konstanz des generalisierten Drehimpulses des Teilchens

$$\begin{aligned} r_i^2 (\dot{\varphi}_i + \frac{1}{2} \omega_{gi}) &= \text{const} = P_i, \\ r_e^2 (\dot{\varphi}_e - \frac{1}{2} \omega_{ge}) &= \text{const} = P_e. \end{aligned} \quad (13 b)$$

Führt man dies in die  $r$ -Komponenten der Bewegungsgleichungen (13 a) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i &= r_i \left\{ \frac{P_i^2}{r_i^4} - \frac{\omega_{gi}^2}{4} + \frac{\omega_{pi}^2}{2} R_0^2 \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) \right\}, \\ \ddot{r}_e &= r_e \left\{ \frac{P_e^2}{r_e^4} - \frac{\omega_{ge}^2}{4} - \frac{\omega_{pe}^2}{2} R_0^2 \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13 c)$$

Die Gln. (13 b, c) liefern auch die Gleichungen für  $R_i$  und  $R_e$  selbst, wenn man darin  $r_i = R_i$  und  $r_e = R_e$  setzt. Es ergeben sich 2 nichtlineare, gekoppelte Schwingungsgleichungen, wobei der Elektronenzylinder

der  $R_e(t)$  wegen der wesentlich kleineren Masse der Elektronen viel rascher schwingt als  $R_i(t)$ . Nimmt man  $R_i$  und  $\omega_{ge}$  als zeitlich konstant während einer Schwingung von  $R_e$  an und setzt kleine Amplituden der Elektronenschwingung voraus, so erhält man eine quasiperiodische Bewegung des Elektronenzylinders um die Gleichgewichtslage  $\bar{R}_e$

$$\frac{P_e^2}{R_e^4} - \frac{\omega_{ge}^2}{4} - \frac{\omega_{pe}^2}{2} R_0^2 \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) = 0 \quad (16)$$

mit der Frequenz

$$\sqrt{4(P_e^2/R_e^4) + \omega_{pe}^2 (R_0^2/R_e^2)},$$

dabei ist  $\omega_{pe} R_0/\bar{R}_e$  die Plasmafrequenz des auf  $\bar{R}_e$  komprimierten Elektronenzylinders.

Die eben beschriebenen schnellen Elektronenschwingungen sollen im folgenden nicht weiter betrachtet werden. Es soll vielmehr angenommen werden, daß der Elektronenzylinder sich stets in der durch Gl. (16) beschriebenen Gleichgewichtslage befindet, d. h. die Trägheit der Elektronen wird vernachlässigt. Das Gleichungssystem (13 c) besteht dann nur mehr aus einer Differentialgleichung für  $R_i(t)$  und einer algebraischen Gleichung für  $R_e(t)$ . Abb. 6 zeigt eine Lösung dieses Gleichungssystems für  $\dot{B}_z = \text{const}$ ,  $\alpha = (\omega_{pi}^2/\omega_{ge}^2) (R_0^2/R_G^2) = 36$ ,  $m_e/m_i = 1,36 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sqrt{\omega_{ge}^2} t_0 = -85,7$  und  $R_0/R_G = 0,205$ .

Der Grad der Verkoppelung von Elektronen- und Ionenbewegung und damit die Annäherung an die Quasineutralität wird durch die Größe  $\alpha = (\omega_{pi}^2/\omega_{ge}^2) / (R_0/R_G)^2$  bestimmt. Dem Wert  $\alpha = 36$  in Abb. 6 entspricht bei  $\dot{B}_z = 5,6 \cdot 10^{10} \text{ T/sec}$  eine Dichte des unkomprimierten Plasmas von  $n_0 (R_0/R_G)^2 = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ , also etwas mehr als die nach Gl. (8) zur Abschirmung des äußeren Potentialfeldes nötigen Ladungsdichte.

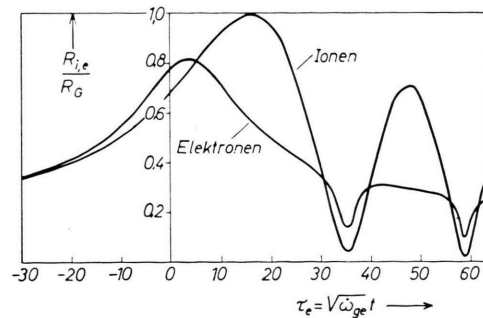


Abb. 6. Zeitliche Veränderung des Radius des Ionen- bzw. Elektronenzylinders  $R_i$  bzw.  $R_e$  bei  $\sqrt{\omega_{ge}^2} t_0 = -85,7$ ;  $R_0/R_G = 0,205$ ;  $\alpha = 36$ ;  $m_e/m_i = 1,36 \cdot 10^{-4}$ .

Wir wollen im folgenden so hohe Ladungsdichten  $n_0$  annehmen, daß die Voraussetzung der Quasineutralität

$$R_i = R_e = R \quad (17)$$

gilt, das elektrische Raumladungsfeld  $E_r$  nach Gl. (15 a) aber natürlich beibehalten. Die Elimination des Raumladungsfeldes aus den beiden Gln. (13 c) gibt

$$(m_i + m_e) \ddot{R} = R \left\{ \frac{m_i P_i^2 + m_e P_e^2}{R^4} - \frac{1}{4} (m_i \omega_{gi}^2 + m_e \omega_{ge}^2) \right\}.$$

Wegen der im Vergleich zur Ionenmasse sehr kleinen Elektronenmasse ist

$$m_i \omega_{gi}^2 \ll m_e \omega_{ge}^2$$

und nach Gl. (13 b) auch

$$m_i P_i^2 \ll m_e P_e^2.$$

Daher gilt für den gemeinsamen Radius des Elektronen- und Ionenzylinders  $R$  schließlich

$$\ddot{R} = \frac{m_e}{m_i} R \left( \frac{P_e^2}{R^4} - \frac{1}{4} \omega_{ge}^2 \right). \quad (18)$$

Der Vergleich mit den Bewegungsgleichungen (13 c) zeigt, daß sich bei starker Raumladungskopplung zwischen Ionen und Elektronen der gemeinsame Elektronen-Ionen-Zylinder so bewegt, als enthielte er nur Teilchen einer Sorte mit gleichem Ladungsbetrag wie die Elektronen aber mit einer Masse  $m$ , die dem geometrischen Mittel aus Elektronen- und Ionenmasse entspricht:

$$m = \sqrt{m_i m_e}. \quad (19)$$

Mit Gl. (18) ist also die radiale ambipolare Bewegung von Ionen und Elektronen im rotations-symmetrischen elektrischen Feld  $E_r = \frac{1}{2} r \dot{B}_z$  und homogenen zeitabhängigen Magnetfeld  $B_z(t)$  auf die radiale Bewegung eines freien Teilchens der Masse  $m$  in diesen Feldern zurückgeführt. Wegen der Ähnlichkeit der  $r$ -Komponenten der Bahnen läßt sich aus  $R(t)$  auch die radiale Bewegung von Teilchen im Inneren des Zylinders bestimmen und aus Gl. (13 b) ihre Bewegung in  $\varphi$ -Richtung. Die radiale Bewegung eines freien Teilchens der Masse  $m$  für konstantes  $B_z$  wurde bereits in Gl. (12) angegeben, wenn man nur die Beträge der komplexen Gleichung betrachtet und

$$\tau = \sqrt{\omega_g} t, \quad \omega_g = \frac{|e| B_z}{m} = \frac{|e| B_z}{\sqrt{m_i m_e}} \quad (20)$$

setzt.

Man sieht, daß sich der Zeitmaßstab der radialen Bewegung eines Elektrons im ambipolaren Fall gegenüber der freien Radialbewegung im gleichen äußeren Feld um den Faktor  $(m_i/m_e)^{1/4}$  verlängert. Damit kann das Teilchen aber auch viel länger vom elektrischen Wirbelfeld  $E_\varphi$  beschleunigt werden und gewinnt wesentlich mehr Energie als im Fall der freien Bewegung. Abb. 7 zeigt die Bahn eines Elektrons bei einer Raumladungskopplung an Ionen mit dem Massenverhältnis  $m_i/m_e = 16$ . Aus der Gyrationbewegung des freien Elektrons um ein driftendes Gyrationzentrum wird nun eine pulsierende Spiralbahn um die Spulenchse.

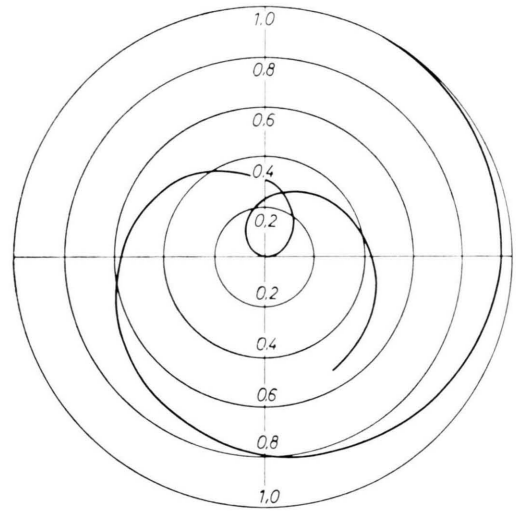


Abb. 7. Bahn eines Elektrons, das zur Zeit des Magnetfeld-Nulldurchgangs  $t_0=0$  seine Bewegung beginnt und durch Raumladungsfelder an Ionen mit dem Massenverhältnis  $m_i/m_e=16$  gekoppelt ist.

Dementsprechend geht auch die Größe

$$\mu = W/|B_z| = (r_e^2 \frac{1}{2} m_e (r_{e2} \dot{\varphi}_e^2 + \dot{r}_e^2) / |B_z| \quad (21)$$

für langsame Feldänderungen ( $\tau \gg 1$ ) nicht gegen einen konstanten Wert wie bei der freien Bewegung, sondern ist für  $\tau \gg 1$  eine periodische Funktion in  $\tau^2$ , nämlich

$$\mu = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} |e| \sqrt{\omega_{ge}} r_0^2 \frac{1}{a - b \cos(\frac{1}{2} \tau^2 + \beta)} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left[ a - b \cos\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right) - \frac{\tau_0^2}{2} \right]^2 + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} b^2 \sin^2\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right) \right\}, \quad (22)$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $\beta$  von der Anfangszeit  $\tau_0$  abhängen und  $a \geq b > 0$ . Für  $m_e/m_i \ll 1$  kann man natürlich

den 2. Summanden in (22) weglassen, der von der Radialbewegung herrührt.

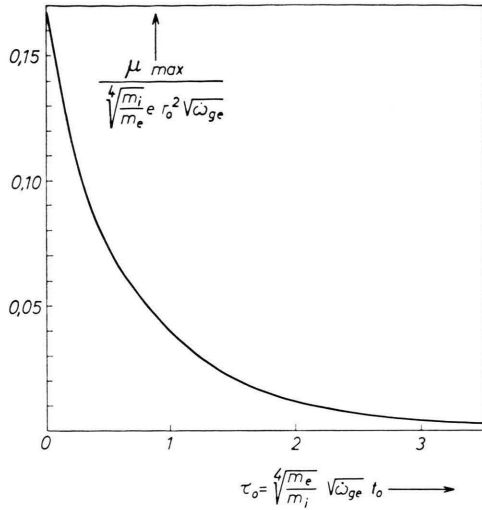


Abb. 8. Maximalwert von  $\mu = m_e v_e^2 / 2 B_z$  während einer Periode in  $t^2$  in Abhängigkeit vom Zeitpunkt  $t_0$  des Bewegungsbeginns des Elektrons.

Immerhin sind also wenigstens der Mittelwert von  $\mu$  über eine Periode von  $\tau^2$

Führt man diese Beziehung in (22) ein, so erhält man

$$\mu = \frac{1}{4 \sqrt{m_i/m_e}} |e| r_0^2 \sqrt{|\dot{\omega}_{ge}|} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \text{const}(\tau_0) - \left( \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} - \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right) \frac{b^2 \sin^2(\frac{1}{2} \tau^2 + \beta)}{a - b \cos(\frac{1}{2} \tau^2 + \beta)} \right\}. \quad (22 a)$$

Da der 2. Summand in  $\{ \}$  für alle  $\tau_0$  und  $\tau$  positiv ist, kann  $\mu$  maximal den Wert

$$\mu_{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} |e| r_0^2 \sqrt{|\dot{\omega}_{ge}|} \text{const}(\tau_0)$$

haben, d. i. bis auf den Faktor  $\sqrt{m_i/m_e}$  und die veränderte Definition von  $\tau_0$  nach Gl. (20) der gleiche Wert wie für die freie Elektronenbewegung. Durch die Raumladungskopplung hat sich also die Größe von  $\mu_{\max}$  gegenüber dem Wert von  $\mu$  für die freie Bewegung des Elektrons im Verhältnis  $\sqrt{m_i/m_e}$  vergrößert und außerdem der Zeitmaßstab für die Veränderung mit  $t_0$  im gleichen Maße verlängert.

Für  $|\tau_0| \gg 1$  wird

$$\mu_{\max} = \frac{1}{8} |e| r_0^2 \sqrt{|\dot{\omega}_{ge}|} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{1}{|\tau_0|^3} = \frac{1}{8} |e| r_0^2 \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{|\dot{\omega}_{ge}|} \frac{1}{|t_0|^3}. \quad (22 c)$$

Bei den vorangegangenen Betrachtungen war angenommen worden, daß alle Teilchen zum Zeitpunkt  $t_0$  in Ruhe waren. Im allgemeinen werden sie jedoch an jedem Ort eine Geschwindigkeitsverteilung mit einer Streuung  $\Delta v_0$  besitzen. Auch dann ergibt die Betrachtung der ungekoppelten Einzelteilchenbahnen, daß sich ein elektrisches Raumladungsfeld ausbilden muß, welches die mittlere Bewegung der Ionen an die der Elektronen anpaßt. Die Streuung in der An-

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau^2}^{\tau^2+4\pi} \mu d(\tau^2)$$

oder der Maximalwert von  $\mu$  einer Periode adiabatische Invarianten. Abb. 8 zeigt das Maximum  $\mu_{\max}$ , das  $\mu$  während einer Periode annimmt in Abhängigkeit vom Beginn der Bewegung  $\tau_0$ . Bei der Berechnung der Größe  $\mu$  für ein frei bewegliches Elektron ohne Raumladungskopplung an Ionen<sup>4</sup> wurde gezeigt, daß die Größe  $\mu$  in der betrachteten Näherung unabhängig von  $\tau$  wird. Diesen Fall erhält man, wenn man in (22)  $m_e/m_i = 1$  setzt. Es ist also die Funktion

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a - b \cos(\frac{1}{2} \tau^2 + \beta)} \{ [a - b \cos(\frac{1}{2} \tau^2 + \beta) - \frac{1}{2} \tau_0]^2 \\ & \quad + b^2 \sin^2(\frac{1}{2} \tau^2 + \beta) \} = \text{const}(\tau_0) \\ & = \frac{1}{8} \pi |\tau_0|^3 \left\{ \left[ J_{3/4} \left( \frac{\tau_0^2}{4} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{2} J_{-3/4} \left( \frac{\tau_0^2}{4} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sqrt{2} J_{1/4} \left( \frac{\tau_0^2}{4} \right) \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + \left[ J_{-1/4} \left( \frac{\tau_0^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2} J_{-3/4} \left( \frac{\tau_0^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2} J_{1/4} \left( \frac{\tau_0^2}{4} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

eine Konstante bezüglich der Veränderung von  $\tau$  aber abhängig von  $\tau_0$ .

fangsgeschwindigkeit führt nun allerdings dazu, daß die Teilchen ihre gekoppelten Bahnen nicht mehr völlig gleichphasig durchlaufen. Die Gleichphasigkeit wird nur so lange erhalten bleiben wie die Zeit

$$\Delta t_0 = \frac{m_e}{|e| E_\varphi} \Delta v_0$$

klein ist gegenüber der Dauer einer Bewegungsperiode, das ist gegen  $(m_i m_e)^{1/4} / |e \dot{B}_z|^{1/2}$  für  $|\tau_0| \ll 1$

bzw. gegen  $(m_i m_e)^{1/2} |e B(t_0)|$  für  $|\tau_0| \gg 1$ . Diese Bedingung ist im Verlauf des Ionisierungsprozesses, wo Teilchen verschiedener Entstehungszeit nebeneinander existieren, sicher nicht immer erfüllt. Man kann erwarten, daß dann die periodischen Anteile der Bewegung verwischt werden und daß dementsprechend auch das magnetische Moment  $\mu$  etwa einen zeitlichen Mittelwert von (22) annehmen und somit zeitlich konstant wird.

Eine genauere Untersuchung dieser Vorgänge wird vorbereitet.

### 3. Diskussion des Einflusses äußerer Parameter auf das Zündverhalten

Man kann die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts noch etwas verallgemeinern, indem man einen beliebigen Kurvenverlauf für  $B_z(t)$  annimmt, der nicht notwendig durch Null gehen muß (Abb. 9).

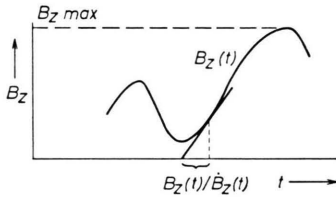


Abb. 9. Die Größe  $B_z(t)/\dot{B}_z(t)$  bei einem beliebigen zeitlichen Verlauf des Magnetfeldes  $B_z(t)$ .

Die Größe  $t$ , die bisher den Abstand zur Nullstelle des Magnetfeldes angab, ist nun durch

$$t \rightarrow B_z(t)/\dot{B}_z(t) \quad (23)$$

zu ersetzen und entsprechend  $\tau$  durch

$$\tau = \frac{(|e| \dot{B}_z(t))^{1/2}}{(m_i m_e)^{1/4}} \cdot \frac{B_z(t)}{\dot{B}_z(t)} \quad (23 a)$$

Insbesondere wird dann für

$$|\tau_0| \gg 1$$

nach Gl. (22 c)

$$\mu_{\max} = \frac{1}{8} r_0^2 m_i \frac{\dot{B}_z^2(t_0)}{|B_z^3(t_0)|} \quad (22 d)$$

Gl. (22 d) führt zu dem einfachen Ergebnis, daß die Energie  $W_{\max}$ , die ein Elektron, das zur Zeit  $t_0$  am Ort  $r_0$  losläuft, innerhalb der ersten Periode von  $\mu$  maximal erreichen kann, gleich

$$W_{\max} = \mu_{\max}(t_0) |B_z(t_0)| = \frac{1}{8} r_0^2 m_i (\dot{B}_z(t_0)/B_z(t_0))^2 = \frac{1}{2} m_i E_\varphi^2(r_0, t_0)/B_z^2(t_0) = \frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_0) \quad (24)$$

ist, also gleich der Energie eines mit  $v_D = E_\varphi/B_z$  driftenden Ions.

Man kann nun wiederum wie in Abschnitt 2 danach fragen, in welchem Zeitbereich um ein Minimum des Betrages  $|B_z(t)|$  ein neugebildetes Elektron, das sich unter dem Einfluß der Raumladungskopplung mit den Ionen bewegt, die Ionisierungsenergie  $W_i$  erlangen kann. Die untere bzw. obere Schranke  $t_{0 \min}$  bzw.  $t_{0 \max}$  ist durch

$$\mu_{\max}(r_0, t_{0 \min}) \cdot |B_z(t_{0 \min})| = W_i \quad (25)$$

$$\text{bzw.} \quad \mu_{\max}(r_0, t_{0 \max}) \cdot |B_z(t_{0 \max})| = W_i$$

gegeben, wobei  $|B_z(t_{0 \max})|$  den Maximalbetrag bezeichnet, den die Feldstärke nach  $t_{0 \max}$  noch annehmen kann.

Ist insbesondere das zu  $t_{0 \min}$  bzw.  $t_{0 \max}$  gehörige  $\tau_{0 \min}$  bzw.  $\tau_{0 \max}$

$$|\tau_{0 \max}^{\min}| \gg 1,$$

so kann man wegen (24) die Ionisierungsbedingung einfacher schreiben:

$$\frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_{0 \min}) = W_i \quad (25 a)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_{0 \max}) \cdot |B_z(t_{0 \max})/B_z(t_{0 \min})| = W_i.$$

Für einen sinus-förmigen Verlauf von  $B_z(t)$  und die auf Seite 682 angegebenen Größen von  $\dot{B}_z(0)$ ,  $B_{\max}$ ,  $r_0 = R_G$  und  $m_e/m_i = 1,36 \cdot 10^{-4}$  ( $D_2^+$ -Ionen) betragen die Ionisierungsschranken um den Nulldurchgang des Magnetfeldes ( $t=0$ )

$$\begin{aligned} \text{bzw.} \quad t_{0 \min} &= -4,0 \cdot 10^{-7} \text{ sec} \\ t_{0 \max} &= 5,25 \cdot 10^{-7} \text{ sec} . \end{aligned}$$

Diese Zeiten stimmen in ihrer Größenordnung recht gut mit dem experimentell gefundenen Streubereich der Zündzeitpunkte von ca.  $\pm 3 \cdot 10^{-7}$  sec um den Nulldurchgang des Magnetfeldes überein.

Gl. (25 a) gibt an, wann in einem beliebigen zeitabhängigen Magnetfeld nach Abb. 9 [unter der einzigen Bedingung, daß  $|\tau_0| \gg 1$  nach Gl. (23 a)] eine Ionisierung des Neutralgases möglich ist, nämlich dann, wenn die Ionendriftenergie in dem entsprechenden  $E_\varphi$ - und  $B_z$ -Feld über der Ionisierungsenergie des Gases liegt. Dies gibt eine Beschränkung der Wirksamkeit einer Vorionisierung des Theta-Pinches mit Hilfe einer Vorentladung durch die Spule, wobei meist noch ein nahezu stationäres Magnetfeld überlagert wird.

Ist das Magnetfeld der Vorentladung durch

$$B_z(t) = B_0 + B_1 \sin \omega t, \quad B_0 > B_1 > 0$$

gegeben, dann muß nach Gl. (25 a) mindestens

$$\frac{\omega^2 B_1^2}{B_0^2 - B_1^2} \geq \frac{8 W_i}{m_i R_G^2} \quad (26)$$

sein, um Ionisierung zu ermöglichen.

Für ein linear ansteigendes Magnetfeld

$$B_z(t) = \dot{B}_z t, \quad \dot{B}_z = \text{const}$$

ist nach Gl. (25 a) Ionisierung mindestens solange möglich, wie

$$t^2 \leq m_i R_G^2 / 8 W_i. \quad (27)$$

Die Ionisierungsdauer ist in diesem Fall völlig unabhängig von  $\dot{B}_z$  und nur von der Gasart und dem Gefäßradius abhängig.

Nach der Formulierung der Ionisierungsbedingung von Gl. (25 a) ist es offenbar gleichgültig, wie die Driftgeschwindigkeit zustande kommt. Man kann anstatt der Feldkombination aus zeitlich veränderlichem Magnetfeld und zugehörigem Wirbelfeld auch den Fall eines homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeldes mit dazu senkrechtem ebenfalls homogenem und konstantem elektrischem Feld betrachten (Abb. 10). Ist die Ladungsträgerdichte so groß, daß Quasineutralität vorausgesetzt werden kann, und existiert

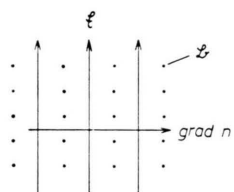


Abb. 10. Orientierung des elektrischen Feldes  $\mathcal{E}$ , Magnetfeldes  $\mathcal{B}$  und Dichtegradienten  $\text{grad } n$ .

weiter ein Gradient der Ladungsträgerdichte senkrecht zu  $E$  und  $B$ , so können die Elektronen bei Anlegen des elektrischen Feldes nicht frei driften, sondern werden von den Ionen auf Grund von Raumladungen zunächst daran gehindert. Dadurch folgen sie länger dem  $E$ -Feld und gewinnen nach Gl. (24) eine Energie, die im Maximum gleich der Ionen-Driftenergie ist.

Diese Erscheinung könnte vielleicht eine Erklärung für die von ALFVÉN und Mitarbeitern<sup>8</sup> beobachtete kritische Drehgeschwindigkeit bei rotierenden Plasmen sowie für die von ALFVÉN postulierte kritische Geschwindigkeit eines interstellaren Gases bei dessen Beschleunigung durch einen Zentralkörper<sup>9</sup> darstellen. In beiden Fällen tritt nämlich als Grenz-

geschwindigkeit für die Beschleunigung eines teilweise ionisierten Plasmas die Geschwindigkeit  $v_c = \sqrt{2 W_i / m_i}$  bzw. Grenzfeldstärke  $E_c = v_c B$  auf, also gerade die in (25 a) für eine mögliche Ionisierung des Gases durch Elektronenstoß geforderte Geschwindigkeit  $v_D$  bzw. Feldstärke  $v_D B$ .

Die Ionisierungsschranken nach Gl. (25 a) sind völlig unabhängig von der Neutralgasdichte, allerdings nur solange, wie die Energieverluste der Elektronen bei Stößen klein gegenüber der zwischen zwei Stößen gewonnenen Energie bleibt. Die Vermehrung der Ladungsträger innerhalb der Ionisierungsgrenzen ist dagegen annähernd exponentiell von der Neutralgasdichte abhängig

$$n \approx n_0 e^{v_i(t-t_{0\min})}, \quad t_{0\min} \leq t \leq t_{0\max}$$

$n$  Elektronendichte,  $n_0$  Neutralgasdichte,  $v_i$  Stoßfrequenz für ionisierende Stöße (Abb. 2), wenn man von Teilchenverlusten durch Diffusion usw. absieht. Daraus erklärt sich die empfindliche Abhängigkeit des Zündzeitpunkts vom Anfangsdruck des Neutralgases<sup>1</sup>. Die Ionisierungsschranken  $t_{0\min}$  und  $t_{0\max}$  hängen nach Gl. (25) noch vom Abstand  $r_0$  von der Spulenchse ab, denn Elektronen mit großem Abstand von der Achse können im Verhältnis des Quadrats ihres Achsenabstandes mehr Energie gewinnen als achsennahe. Dementsprechend können sich die Elektronen in den wandnahen Gebieten länger exponentiell vermehren als in den achsennahen. Dadurch nimmt die Ladungsträgerdichte in Richtung auf die Gefäßwand zu.

Bisher wurde stets angenommen, daß die Energieverluste der Elektronen infolge von Stößen klein gegenüber ihrem Energiegewinn im äußeren elektrischen Feld seien. Dies ist sicher von einer gewissen Neutralgasdichte an nicht mehr richtig. Oberhalb dieser kritischen Dichte nimmt die Elektronenvermehrung nach einem Maximum wieder ab. Die kritische Stoßfrequenz  $v_c$  ist etwa dann erreicht, wenn die Zeit zwischen zwei Stößen nicht mehr ausreicht, um ein Elektron bis zur Ionisierungsenergie  $W_i$  zu beschleunigen

$$\frac{m_e}{2} \left( \frac{e}{m_e} E_\varphi \frac{1}{v_c} \right)^2 = W_i, \quad (28)$$

$$v_c = \frac{|e E_\varphi|}{\sqrt{2 m_e W_i}}.$$

<sup>8</sup> B. ANGERTH, L. BLOCK, U. FAHLESON u. K. SOOP, Proc. Conf. on Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion Research, Salzburg 1962, S. 39.

<sup>9</sup> H. ALFVEN u. J. M. WILCOX, Astrophys. J. **136**, 1016 [1962].

Mit

$$E_q = \frac{1}{2} R_G \dot{B}_z, \dot{B}_z = 5,6 \cdot 10^{10} \text{ T/sec}, W_i = 15,4 \text{ eV}$$

$$\text{ist} \quad \nu_c = 4,7 \cdot 10^9 \text{ sec}^{-1}.$$

Die totale Stoßfrequenz von Elektronen gegen  $\text{H}_2$ -Moleküle ist im betrachteten Energiebereich ungefähr durch

$$\nu = 1,7 \cdot 10^{-7} n_0$$

gegeben, wobei  $n_0 [\text{cm}^{-3}]$  die  $\text{H}_2$ -Gasdichte bedeutet.

Die kritische  $\text{H}_2$ -Gasdichte folgt daraus zu

$$n_{0c} = \frac{\nu_c}{1,7 \cdot 10^{-7}} = 2,8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}. \quad (29)$$

Sie entspricht etwa einem Anfangsdruck des Neutralgases von 1 Torr. Außerdem können schnellere Elektronen ihre Energie auch dadurch verlieren, daß sie von einer kritischen Ladungsträgerdichte  $n_c$  an nicht mehr vorwiegend mit Neutralteilchen stoßen, sondern

auch durch viele schwache Stöße mit langsameren Elektronen abgebremst werden. Der Zeitmaßstab für diesen Vorgang ist etwa durch

$$\nu = 2,6 n T^{-3/2} \ln A, \quad T \text{ in } ^\circ\text{K}$$

gegeben und führt bei  $T \approx 10^4 \text{ } ^\circ\text{K}$  und  $\ln A = 6$  zu einer kritischen Dichte für die Abbremsung von

$$n_c = \frac{\nu_c}{2,6 T^{-3/2} \ln A} = 3,0 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}. \quad (30)$$

Unterhalb dieser kritischen Dichten erfolgt die Ionisation vorwiegend durch Stöße frei beschleunigter Elektronen. Oberhalb dieser Dichten werden die Elektronenenergien thermalisiert und die Ionisation erfolgt im wesentlichen durch Stöße thermischer Elektronen. Dieser Bereich wurde in einer magnetohydrodynamischen Theorie behandelt<sup>10</sup>.

Für die Ausführung numerischer Rechnungen danke ich Frau U. BERKL und Herrn F. POHL.

<sup>10</sup> D. DÜCHS, 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963, Bd. II, S. 567.

## Druckmessungen mit piezoelektrischen Sonden an einem linearen Z-Pinch\*

Von KLAUS BÜCHL \*\*

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforschg. **19 a**, 690—696 [1964]; eingegangen am 11. Februar 1964)

The radial distribution of the dynamic and kinetic pressure in a linear Z-pinch-discharge has been investigated with piezoelectric probes. The electrical signals from the probe are proportional to the momentum flux on the pressure-sensitive surface. The momentum flux is anisotropic, because there are radial plasma streams during the compression and expansion of the plasma cylinder. The dynamic and kinetic pressure were determined from the momentum flux by comparing the probe measurements made in different directions. The conditions and construction of the probe necessary for both a good time resolution and high sensitivity are described. The probes have time resolutions and sensitivities of 0.6  $\mu\text{s}$  and 7.7 Torr/mV and 0.8  $\mu\text{s}$  and 2.0 Torr/mV respectively.

Für die Messung des gaskinetischen Drucks in heißen und dichten Gasentladungsplasmen ist eine Meßmethode notwendig, die nicht nur eine genügende Empfindlichkeit, sondern auch eine gute Zeitauflösung besitzt, da sich die Entladungsplasmen im Bereich von Mikrosekunden verändern. Am besten werden diese Forderungen durch die Verwendung einer piezoelektrischen Sonde<sup>1-3</sup> erfüllt.

Eine solche Sonde mißt den Impulsstrom auf die druckempfindliche Fläche. Der Zusammenhang zwischen dem Impulsstrom und dem gaskinetischen Druck wird im ersten Abschnitt aufgezeigt. Die Anisotropien des Druckes im Plasma, die durch Strömungen und durch Magnetfelder entstehen, lassen sich durch geeignete Kombinationen von Sondenmessungen in verschiedenen Richtungen bestimmen.

\* Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

\*\* Auszug aus der von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation.

<sup>1</sup> M. O. STERN u. E. N. DACUS, Rev. Sci. Instrum. **32**, 140 [1961].

<sup>2</sup> A. W. DE SILVA, Piezoelectric Probes in UCRL-8887, Sept. 1959.

<sup>3</sup> N. V. FILIPPOV, in: Plasma Physics and the Problem of Thermonuclear Reactions, Vol. 3, S. 280, Pergamon Press, New York 1959.